$$= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_s(E_r).$$

b) Dokažimo tvrđenje za $E = X$. Zamenom $\kappa_E s, \kappa_E t$ i $\kappa_E(s+t)$ dobija se opšte tvrđenje.

Označimo $E_{ij} = A_i \cap B_j$ $i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m$. Skupovi $E_{ij},\ i \neq j$ su disjunktni i važi $\bigcup\limits_{i \le n, j \le m} E_{i,j} = X$. Iz definicije funkcija s i t sledi

$$\int\limits_{E_{ij}} (s+t)d\mu = (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_{ij})$$

$$= \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij}) = \int\limits_{E_{ij}} s d\mu + \int\limits_{E_{ij}} t d\mu.$$

Na osnovu a) sledi

$$\int\limits_X s d\mu + \int\limits_X t d\mu = \varphi_s(\bigcup_{i,j} E_{ij}) + \varphi_t(\bigcup_{i,j} E_{ij}) =$$

$$\sum_{i,j} (\varphi_s(E_{ij}) + \varphi_t(E_{ij})) = \sum_{i,j} \varphi_{s+t}(E_{ij}) = \int\limits_X (s+t)d\mu.$$

■

Primer 4.1. Neka je $X = [0,1]$, $f(x) = x$ i K Kantorov skup.

a) Ako je m Lebegova mera, tada je $m(K) = 0$ te je na osnovu Teoreme 4.1 e) $\int_K f\, dm = 0$.

b) Ako je F Kantorova funkcija i μ_F njome generisana Lebeg-Stiltjesova mera, tada je $\mu_F(K^c) = 0$, pa je $\int_{K^c} f\, d\mu_F = 0$.

Primer 4.2. Neka je $f : X \to [0, \infty]$ merljiva funkcija na $(X, \mathcal{M})$ i neka je δ_{x_0} Dirakova mera skoncentrisana u tački $x_0 \in X$ data u Primeru 2.4. Dokazaćemo da je

$$\int_X f\, d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Zaista, ako je f jednostavna funkcija oblika $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \kappa_{A_i}$, tada je $\int_X f\, d\delta_{x_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_0}(A_i) = \alpha_k = f(x_0)$. (Koristili smo činjenicu da su skupovi A_i disjunktni, te tačka x_0 pripada tačno jednom od njih npr. $x_0 \in A_k$.)

Ako je f proizvoljna nenegativna funkcija, tada na osnovu Teoreme 1.7 postoji rastući niz jednostavnih nenegativnih funkcija $(s_n)_n$ tako da $s_n \to f$, $n \to \infty$. Prema prethodnom je $\int_X s_n\, d\delta_{x_0} = s_n(x_0)$ za sve $n \in \mathbf{N}$, a na osnovu Lebegove teoreme o monotonoj konvergenciji je tada $\int_X f\, d\delta_{x_0} = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\delta_{x_0} = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = f(x_0)$.